

1 Матриці.

1.1 Ранг матриці.

1. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вказати можливе значення ранга матриці, яка має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

4. Знайти значення λ при яких матриця $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ має найменший ранг.

5. Чому дорівнює ранг матриці $\lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при різних значеннях λ ?

6. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

Визначити ранг матриці за допомогою обвідного мінору:

8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

1.2 Системи лінійних рівнянь.

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса.

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12; \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9; \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3; \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16; \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17; \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 = 29; \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55; \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115; \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50. \end{cases}$$

Дослідити систему та знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ :

$$6. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5; \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4; \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$$

2 Відповіді.

2.1 Ранг матриці.

1. $rgA = 2$.
2. $rgA = 2$.
3. 0, 1 або 2.
4. Якщо $\lambda \neq 0, rgA = 3$.
5. Якщо $\lambda = 3, rgA = 2$, при $\lambda \neq 3, rgA = 3$.
6. 2.
7. 3.
8. 3.
9. 2.

2.2 Системи лінійних рівнянь.

1. $x_1 = 2c_1 - c_2, x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_4 = 1$ -загальний розв'язок.
2. система не сумісна.
3. $x_1 = \frac{1}{2}x_4 + \frac{31}{6}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{6}$.
4. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4, x_4 = -3$.
5. $x_1 = -\frac{12}{205}, x_2 = \frac{176}{123} + \frac{4}{3}x_3, x_4 = \frac{97}{205}$.
6. Якщо $\lambda = 0$, система не сумісна, у випадку $\lambda \neq 0, x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3, x_2 = \frac{9\lambda-16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3, x_4 = \frac{1}{\lambda}$.
7. Якщо $\lambda = 1$, система не сумісна, у випадку $\lambda \neq 1, x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3, x_2 = \frac{9\lambda-16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3, x_4 = \frac{1}{\lambda}$.