

1 Матриці.

1.1 Дії з матрицями.

1. Виконати дії: $4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Знайти добуток матриць: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Обчислити: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Виконати дії: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Знайти добуток матриць: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Обчислити $A * B$ та $B * C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
8. Обчислити $A * A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
9. Обчислити: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^3$.
10. Обчислити: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.
11. Обчислити: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n$.
12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.
13. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.
14. Знайти значення многочлена $f(x) = 3 * x^2 - 2 * x + 5$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.
15. Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці.
16. Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює одиничній матриці.

1.2 Обернена матриця.

Знайти обернені матриці.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне рівняння.

$$10. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 Відповіді.

2.1 Дії з матрицями.

$$1. \begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, 13.$$

$$8. \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } n \text{ парне і } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ якщо } n \text{ не парне.}$$

$$11. \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

$$14. f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$15. \begin{pmatrix} a & b \\ c & -c \end{pmatrix}, \text{ де } a^2 + bc = 0$$

$$16. \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ де } a^2 + bc = 1, \text{ або } \pm E.$$

2.2 Обернена матриця.

$$1. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2. A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$$7. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$11. X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$12. X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$