

1 Визначник матриці.

1.1 Обчислити визначник.

1. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

4. Обчислити визначник, розкладаючи по третьому рядку: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

5. Обчислити визначник, розкладаючи по 2-му стовпчику: $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$

6. Обчислити визначник, не розкладаючи його: $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$

7. Обчислити: $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$

8. Довести тотожність: $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$

9. Довести, що $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

10. Довести, що $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$

11. Довести тотожність: $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$

12. Обчислити: $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

13. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

14. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 49 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}.$$

15. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

16. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{8}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

17. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{2} & \frac{14}{3} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{12}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

18. Обчислити:
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}.$$

19. Обчислити визначник Δ за допомогою визначника δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначники способом зведення до трикутного вигляду:

20.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

21.
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

22.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

23.
$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

25. Обчислити квадрат визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначник, користуючись розкладанням по рядках або стовпчиках, попередньо спростивши його:

$$26. \begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 & 12 & -15 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 8 & 2 & -4 \\ -6 & 18 & 15 & 12 & -6 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$29. \text{ Обчислити } \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Користуючись правилом Крамера, розв'язати систему лі-

нійних неоднорідних рівнянь:

$$30. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0; \\ 3x + 3y + 4z = 3; \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0; \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0; \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0; \\ 2x - 2y + 5z = 0; \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0 \end{cases}$$

Визначити ранг матриці за допомогою обвідного мінору:

$$33. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$34. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$35. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2 Відповіді.

2.1 Визначник.

1. 1.
2. 1.
3. 75.
4. $8a + 15b + 12c - 19d$.
5. $2a - 8b + c + 5d$.
6. 0.
7. $n!$
12. 90.
13. 100.
14. 10.
15. 52.
16. 1.
17. 1.
18. $\frac{1}{35}$
19. 18.
20. $n!$
21. 48.
22. 900.
23. $635 - 665?$
24. $2n + 1$
25. 256.
26. -84.
27. -84.
28. 14.
29. $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^n$.
30. $x = 3, y = -2, z = 2$.
31. $x = 1, y = 2, z = -1$.
32. $x = 2, y = -3, z = -2$.
33. 3.
34. 3.
35. 2.