Потапенко Ігор Володимирович. Старший викладач кафедри геометрії і топології.

1. **Назва доповіді .** Інфінітезимальні деформації поверхонь з фіксованою варіацією ріманової зв'язності

2. **Основні задачі дослідження**:

- дослідити основні рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь;
- встановити умови відновлення вектора зміщення за двома заданими симетричними тензорними полями, які є відповідно варіаціями першого та другого фундаментальних тензорів поверхні;
- розглянути новий тип сітки ліній на поверхні ненульової гаусової (повної) кривини (сітки Лейко), лінії однопараметричних сімейств якої є ізопериметричними екстремалями повороту, вивчити її властивості;
- встановити умови стаціонарності сітки Лейко при загальних інфінітезимальних деформаціях поверхонь в тривимірному евклідовому просторі;
- встановити зв'язок між нормованими тензорами двох регулярних сіток на поверхні в тривимірному евклідовому просторі E_3.
- встановити умови, відтворення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією ріманової зв'язності (символів Крістоффеля другого роду);
- встановити умови, існування деяких спеціальних типів інфінітезимальних деформацій метрик та поверхонь в тривимірному евклідовому просторі E_3.
- встановити характеристику деформуючого поля при інфінітезимальних деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок в тривимірному евклідовому просторі E_3.

3. **Формулювання основних результатів:**

Розглядаються інфінітезимальні деформації першого порядку виду

$$\bar{r}_t = \bar{r}(x^1, x^2) + t\,\bar{y}(x^1, x^2)\,. \qquad (1)$$

Теорема 1 . Якщо регулярна поверхня S класу C^k, $k \ge 3$ в евклідовому просторі E_3 зазнає інфінітезимальної деформації (1),, то на поверхні існують два симетричні тензорні поля α_{ij} та β_{ij} ,які задовольняють співвідношення

$$\beta_{ik}b_{jl} - \beta_{ij}b_{kl} + \beta_{jl}b_{ik} - \beta_{kl}b_{ij} = g_{ml}\delta R^m_{ijk} + \alpha_{ml}R^m_{ijk} \qquad (2)$$

та

$$\beta_{ij,k} - \beta_{ik,j} = b_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} - b_{mk}\delta\Gamma^m_{ij}\,, \qquad (3)$$

де тензорні поля $\delta\Gamma^h_{ij}$ та δR^h_{ijk} є варіаціями символів Крістоффеля другого роду та тензора Рімана. ',' – коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} поверхні, R^h_{ijk} - компоненти тензора кривини Рімана.

***Теорема* 2**. Якщо на регулярній поверхні класу C^k, $k \ge 3$ існують два симетричні тензорні поля α_{ij} та β_{ij} класу C^m, $m \ge 2$, які задовольняють співвідношенням (2) - (3), де тензорні поля $\delta\Gamma^h_{ij}$ та δR^h_{ijk} визначаються за формулами

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{g^{mh}}{2}(\alpha_{im,j} + \alpha_{jm,i} - \alpha_{ij,m})\,, \qquad (4)$$

та $$\delta R^h_{ijk} = \delta\Gamma^h_{ik,j} - \delta\Gamma^h_{ij,k} \qquad (5)$$

‘,’ – коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} ,то існує інфінітезимальна деформація (1) з вектором зміщення $\bar{y}(x^1, x^2)$ для якої ці тензорні поля будуть варіаціями δg_{ij} та δb_{ij} коефіцієнтів першої та другої квадратичної форми поверхні відповідно.

***Теорема* 3** . При інфінітезимальній деформації (1) регулярної поверхні S класу C^k, $k \geq 3$,що не містить омбілічних точок, варіації $\delta b_{11}, \delta b_{22}$ будуть мати представлення через варіації $\delta K, \delta H$ гауссової та середньої кривин за формулами

$$\delta b_{11} = \frac{1}{\sqrt{E}}(k_1\delta H - \frac{1}{2}\delta K)g_{11} + k_1\delta g_{11},$$
$$\delta b_{22} = \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{1}{2}\delta K - k_2\delta H)g_{22} + k_2\delta g_{22}.(6)$$

Теорема 4. Для того, щоб регулярна поверхня обертання S без омбілічних точок з векторно - параметричним рівнянням $\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha, \\ z = f(r) \end{cases}$ зазнавала інфінітезимальної деформації (1) з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду в бінарній області регулярності, необхідно і достатньо, щоб в цій області характеристичне рівняння

$$\mathrm{b}_{22}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^1)^2} + \mathrm{b}_{11}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^2)^2} + \mathrm{R}\frac{\partial q}{\partial x^1} + \mathrm{S}q = \mathrm{G}$$, де $R = 2\frac{\partial \mathrm{b}_{22}}{\partial x^1} - \mathrm{b}_{22}\Gamma^1_{11} + \mathrm{b}_{22}\Gamma^2_{12} - \mathrm{b}_{11}\Gamma^1_{22}$,

$$S = \frac{\partial^2 \mathrm{b}_{22}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial \mathrm{b}_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} + \mathrm{b}_{22}\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \mathrm{b}_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial \mathrm{b}_{22}}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - \mathrm{b}_{22}\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^1}\mathrm{b}_{11}\Gamma^1_{12} - \mathrm{b}_{11}\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1},$$

$$G = \Gamma^1_{11}(-\mathrm{b}_{11}\delta\Gamma^1_{12} + \mathrm{b}_{22}\delta\Gamma^2_{12}) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\mathrm{b}_{11}\delta\Gamma^1_{12} - \mathrm{b}_{22}\delta\Gamma^2_{11}) + \frac{\partial}{\partial x^1}(-\mathrm{b}_{22}\delta\Gamma^2_{12} + \mathrm{b}_{11}\delta\Gamma^1_{22}) -$$
$$-\frac{\partial^2 p_1}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 p_2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial}{\partial x^1}p_2\Gamma^1_{11} - p_2\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - p_1\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial p_2}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} + \mathrm{p}_2\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial p_1}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} + p_1\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\delta \mathrm{K} g_{11} + k_1\delta g_{11},\ p_2 = -\frac{\delta \mathrm{K} g_{22}}{2\sqrt{E}} - k_2\delta g_{22}$$ мало розв’язки відносно функції $\mathrm{q} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\sqrt{E}}$

.При цьому деформуюче поле, буде характеризуватися функціями (6), що задовольняють основній системі (2) – (3).

Коваріантна похідна варіації першого фундаментального тензора регулярної поверхні S при інфінітезимальній деформації (1) визначається за формулою $\delta g_{ij,k} = g_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\delta\Gamma^m_{jk}$. (7)

***Теорема*5.** Якщо тензорні поля $\overset{1}{\delta g}_{ij}, \overset{2}{\delta g}_{ij}$ є два довільні розв’язки системи (7) на поверхні ненульової гауссової кривини, то вони відрізняються на величину Cg_{ij} , де C-const, а g_{ij} - метричний тензор поверхні.

Теорема 6. *При інфінітезимальній деформації (1) регулярної поверхні S ненульової гауссової кривини , при виконанні умов* $\delta R^{\alpha}_{\alpha kl} = 0$ *(8) ,де* δR^h_{ijk} *- варіація тензора кривини Рімана виражена за формулою (5)., система (7) завжди має розв’язок.*