

**1. Назва доповіді.** Інфінітезимальні деформації поверхонь з фіксованою варіацією ріманової зв'язності

**2. Основні задачі дослідження:**

- дослідити основні рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь;
- встановити умови відновлення вектора зміщення за двома заданими симетричними тензорними полями, які є відповідно варіаціями першого та другого фундаментальних тензорів поверхні;
- розглянути новий тип сітки ліній на поверхні ненульової гаусової (повної) кривини (сітки Лейко), лінії однопараметричних сімейств якої є ізопериметричними екстремальними повороту, вивчити її властивості;
- встановити умови стаціонарності сітки Лейко при загальних інфінітезимальних деформаціях поверхонь в тривимірному евклідовому просторі;
- встановити зв'язок між нормованими тензорами двох регулярних сіток на поверхні в тривимірному евклідовому просторі  $E_3$ .
- встановити умови, відтворення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією ріманової зв'язності (символів Крістоффеля другого роду);
- встановити умови, існування деяких спеціальних типів інфінітезимальних деформацій метрик та поверхонь в тривимірному евклідовому просторі  $E_3$ .
- встановити характеристику деформуючого поля при інфінітезимальних деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок в тривимірному евклідовому просторі  $E_3$ .

**3. Формулювання основних результатів:**

Розглядаються інфінітезимальні деформації першого порядку виду

$$\bar{r}_t = \bar{r}(x^1, x^2) + t y(x^1, x^2). \quad (1)$$

**Теорема 1.** Якщо регулярна поверхня  $S$  класу  $C^k$ ,  $k \geq 3$  в евклідовому просторі  $E_3$  зазнає інфінітезимальної деформації (1), то на поверхні існують два симетричні тензорні поля  $\alpha_{ij}$  та  $\beta_{ij}$ , які задовольняють співвідношення

$$\beta_{ik} b_{jl} - \beta_{ij} b_{kl} + \beta_{jl} b_{ik} - \beta_{kl} b_{ij} = g_{ml} \delta R_{ijk}^m + \alpha_{ml} R_{ijk}^m \quad (2)$$

та

$$\beta_{ij,k} - \beta_{ik,j} = b_{nj} \delta \Gamma_{ik}^m - b_{mk} \delta \Gamma_{ij}^m, \quad (3)$$

де тензорні поля  $\delta \Gamma_{ij}^h$  та  $\delta R_{ijk}^h$  є варіаціями символів Крістоффеля другого роду та тензора Рімана. ‘ $\delta$ ’ – коваріантна похідна на базі метричного тензора  $g_{ij}$  поверхні,  $R_{ijk}^h$  - компоненти тензора кривини Рімана.

**Теорема 2.** Якщо на регулярній поверхні класу  $C^k$ ,  $k \geq 3$  існують два симетричні тензорні поля  $\alpha_{ij}$  та  $\beta_{ij}$  класу  $C^m$ ,  $m \geq 2$ , які задовольняють співвідношенням (2) - (3), де тензорні поля  $\delta \Gamma_{ij}^h$  та  $\delta R_{ijk}^h$  визначаються за формулами

$$\delta \Gamma_{ij}^h = \frac{g^{mh}}{2} (\alpha_{im,j} + \alpha_{jm,i} - \alpha_{ij,m}), \quad (4)$$

та

$$\delta R_{ijk}^h = \delta \Gamma_{ik,j}^h - \delta \Gamma_{ij,k}^h \quad (5)$$

‘,’ – коваріантна похідна на базі метричного тензора  $g_{ij}$ , то існує інфінітезимальна деформація (1) з вектором зміщення  $\bar{y}(x^1, x^2)$  для якої ці тензорні поля будуть варіаціями  $\delta g_{ij}$  та  $\delta b_{ij}$  коефіцієнтів першої та другої квадратичної форми поверхні відповідно.

**Теорема 3.** При інфінітезимальній деформації (1) регулярної поверхні  $S$  класу  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , що не містить омбілічних точок,

варіації  $\delta b_{11}$ ,  $\delta b_{22}$  будуть мати представлення через варіації  $\delta K$ ,  $\delta H$  гауссової та середньої кривин за

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \frac{1}{\sqrt{E}} (k_1 \delta H - \frac{1}{2} \delta K) g_{11} + k_1 \delta g_{11}, \\ \delta b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{E}} (\frac{1}{2} \delta K - k_2 \delta H) g_{22} + k_2 \delta g_{22}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Теорема 4.** Для того, щоб регулярна поверхня обертання  $S$  без омбілічних точок з векторно - параметричним

$$\text{рівнянням} \begin{cases} x=r \cos \alpha, \\ y=r \sin \alpha, \\ z=f(r) \end{cases} \text{ зазнавала інфінітезимальної деформації (1) з фіксованою варіацією символів Крістоффеля}$$

другого роду в бінарній області регулярності, необхідно і достатньо, щоб в цій області характеристичне рівняння

$$b_{22} \frac{\partial^2 q}{(\partial x^1)^2} + b_{11} \frac{\partial^2 q}{(\partial x^2)^2} + R \frac{\partial q}{\partial x^1} + S q = G, \text{ де } R = 2 \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} - b_{22} \Gamma_{11}^1 + b_{22} \Gamma_{12}^2 - b_{11} \Gamma_{22}^1,$$

$$S = \frac{\partial^2 b_{22}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} \Gamma_{11}^1 + b_{22} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + b_{11} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} \Gamma_{12}^2 - b_{22} \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^1} b_{11} \Gamma_{12}^1 - b_{11} \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1},$$

$$G = \Gamma_{11}^1 (-b_{11} \delta \Gamma_{12}^1 + b_{22} \delta \Gamma_{12}^2) + \frac{\partial}{\partial x^2} (b_{11} \delta \Gamma_{12}^1 - b_{22} \delta \Gamma_{11}^2) + \frac{\partial}{\partial x^1} (-b_{22} \delta \Gamma_{12}^2 + b_{11} \delta \Gamma_{22}^1) -$$

$$- \frac{\partial^2 p_1}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 p_2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial}{\partial x^1} p_2 \Gamma_{11}^1 - p_2 \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - p_1 \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \frac{\partial p_2}{\partial x^1} \Gamma_{12}^2 + p_2 \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial p_1}{\partial x^1} \Gamma_{22}^1 + p_1 \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \delta K g_{11} + k_1 \delta g_{11}, p_2 = -\frac{\delta K g_{22}}{2\sqrt{E}} - k_2 \delta g_{22} \text{ мало розв'язки відносно функції } q = \frac{\delta H}{\sqrt{E}}$$

.При цьому деформує поле, буде характеризуватися функціями (6), що задовольняють основній системі (2) – (3).

Коваріантна похідна варіації першого фундаментального тензора регулярної поверхні  $S$  при інфінітезимальній деформації

$$(1) \text{ визначається за формулою } \delta g_{ij,k} = g_{mj} \delta \Gamma_{ik}^m + g_{mi} \delta \Gamma_{jk}^m. \quad (7)$$

**Теорема 5.** Якщо тензорні поля  $\delta g_{ij}^1, \delta g_{ij}^2$  є два довільні розв'язки системи (7) на поверхні ненульової гауссової кривини, то вони

відрізняються на величину  $C g_{ij}$ , де  $C = \text{const}$ , а  $g_{ij}$  - метричний тензор поверхні.

**Теорема 6.** При інфінітезимальній деформації (1) регулярної поверхні  $S$  ненульової гауссової кривини, при виконанні умов

$$\delta R_{\alpha kl}^{\alpha} = 0 \quad (8) \text{ , де } \delta R_{ijk}^h \text{ - варіація тензора кривини Рімана виражена за формулою (5)., система (7) завжди має розв'язок.}$$