Шугайло Е.А. **Аффинная кривизна плоских геодезических на аффинных гиперповерхностях**

Будем рассматривать аффинные погружения гиперповерхностей в смысле К. Номидзу, Т. Сасаки. Пусть (M^n, ∇) – аффинное n-мерное многообразие со связностью ∇, а $(\mathbb{R}^{n+1}, D)$– стандартное (арифметическое) аффинное пространство с плоской связностью D. Погружение $f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ называется аффинным, если вдоль погружения определено трансверсальное дифференцируемое векторное поле ξ такое, что в каждой точке $x \in M^n$ для любых векторных полей $X,\ Y$ на M^n справедливо разложение

$$(D_X f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + h_x(X,\ Y)\xi, \tag{1}$$

которое определяет *аффинную фундаментальную форму* $h(X, Y)$. Известно, что ранг аффинной фундаментальной формы не зависит от выбора трансверсального векторного поля. Гиперповерхность с невырожденной аффинной фундаментальной формой называется *невырожденной* гиперповерхностью.

Для трансверсального векторного поля ξ записывается также аналогичное разложение

$$D_X \xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi,$$

которое определяет *оператор Вейнгартена* S и *форму трансверсальной связности* τ.

Для погружения $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (без заданной связности) выбор трансверсального векторного поля ξ определяет индуцированную связность ∇ из разложения (1).

Для аффинного погружения $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ с трансверсальным векторным полем ξ определим *индуцированный элемент объема* θ на M^n следующим образом:

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = |f_*(X_1), \ldots, f_*(X_n), \xi|.$$

Для аффинного погружения $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, трансверсальное векторное поле ξ называется *эквиаффинным*, если $\nabla_X \theta$ для всех $X \in T_x(M^n), x \in M^n$. Данное условие эквивалентно тому, что форма трансверсальной связности нулевая $\tau(X) \equiv 0$. С эквиаффинным векторным полем ξ мы имеем *эквиаффинную структуру* $(\nabla,\ \theta)$ на M^n.

Для невырожденной гиперповерхности $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ эквиаффинное трансверсальное векторное поле, для которого элемент объема, индуцированный аффинной фундаметальной формой, совпадает с θ, называется *аффинным нормальным* векторным полем, а гиперповерхность называется *гиперповерхностью Бляшке*. Данное условие на ξ является жестким: аффинная нормаль определяется однозначно с точностью до знака.

Известно, что если для гиперповерхности Бляшке оператор Вейнгартена имеет вид $S = \lambda I$, где λ – функция, I – тождественный оператор, то $\lambda = \mathrm{const}$.

Гиперповерхность Бляшке называется *аффинной гиперсферой*, если $S = \lambda I$. Если $\lambda = 0$, то это *несобственная* аффинная гиперсфера, а если же $\lambda \neq 0$ – *собственная* аффинная гиперсфера.

Известна следующая

Теорема. *Гиперповерхность Бляшке является аффинной гиперсферой тогда и только тогда, когда все ее геодезические плоские.*

Если отказаться от условия на нормаль Бляшке и рассматривать невырожденные аффинные погружения $f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+1}, D)$, то из условия, что все ∇-геодезические плоские, следует, что оператор Вейнгартена имеет вид $S = \lambda I$, где λ – некоторая функция. Напомним, что такие погружения называются *омбилическими*. Доказано, что если функция λ не обращается в нуль во всей области определения, то без изменения связности можно выбрать $\xi = -\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, задающий погружение. Напомним, что аффинное погружение с $\xi = -\vec{r}$ называется *центро-аффинным*, для него $S = I$.

Если рассматривать только эквиаффинные преобразования пространства, т.е. преобразования не меняющие объем, то можно говорить об аффинной кривизне кривой. На аффинной гиперсфере, центро-аффинной гиперповерхности и аффинной омбилической гиперповерхности все геодезические плоские. Но оказывается, что если геодезическая с касательным векторным полем X на невырожденной гиперповерхности является плоской кривой, то $SX = \lambda X$, где λ – некоторая функция.

Для невырожденной плоской кривой $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ аффинная длина дуги σ и аффинная кривизна $k(\sigma)$ определяются следующим образом:

$$\sigma = \int |\ \vec{r_t}'\ \vec{r_t}''\ |^{\frac{1}{3}}\ dt, \quad \vec{r_\sigma}''' = -k(\sigma)\vec{r_\sigma}'$$

Получена формула для аффинной кривизны плоской геодезической на аффинной гиперповерхности с эквиаффиной структурой в терминах аффинной фундаментальной формы и оператора Вейнгартена.

$$k = \frac{-5(X(h(X,X)))^2 + 3h(X,X) \cdot \partial_X^2(h(X,X)) + 9\lambda \cdot h^3(X,X)}{9h^{\frac{8}{3}}(X,X) \cdot |f_*(X), \xi, \vec{n}|^{\frac{2}{3}}}$$

Здесь h – аффинная фундаментальная форма гиперповерхности, $SX = \lambda X$, $\vec{n}$ – постоянный мультивектор $\vec{n} = \{\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_{n-1}\}$, $\vec{n}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, который удовлетворяет условию:

$$|\vec{t}_1,\ \vec{t}_2,\ \vec{n}| = 1$$

$\{\vec{t}_1,\ \vec{t}_2\}$ – базис той плоскости α в $\mathbb{R}^{n+1}$, в которой лежит данная геодезическая.