Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Драч Костянтин Дмитрович
Шугайло Олена Олексіївна
Ямпольський Олександр Леонідович

КАНОНІЧНА ТЕОРІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

1 Способи задання кривих на площині

Згадаємо, що пряму на площині ми задавали в різний спосіб, а саме:

- явним рівнянням $y = kx + b$, або $x = a$;
- неявнім рівнянням $ax + by + c = 0$;
- параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;
- векторним рівнянням $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

В такий самий спосіб можна задавати і криву на площині.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається ***неявним рівнянням кривої*** γ, якщо будь-який розв'язок (x, y) цього рівняння є координатами деякої точки кривої γ, та навпаки, координати будь-якої точки (x, y) кривої γ є розв'язком рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

Наприклад, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ є неявним рівнянням кола з центром в точці (a, b) та радіусом R.

Явне рівняння – це рівняння графіка деякої функції $y = f(x)$, або $x = g(y)$.

Зауважимо, що задати явно усе коло неможливо. Ми можемо задати явно

- верхнє півколо $y = b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$;
- нижнє півколо $y = b - \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$;
- праве півколо $x = a + \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$;
- ліве півколо $x = a - \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$.

Користуючись основною тригонометричною тотожністю ми можемо параметризувати коло наступним чином:

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t. \end{cases}$$

Якщо не зробити ніяких зауважень щодо параметру t, то при зміні t від $-\infty$ до $+\infty$ ми будемо проходити коло нескінченну кількість разів. Щоб встановити взаємно однозначну відповідність між параметром t та точкою (x, y), що належить колу, ми повинні зробити обмеження $t \in [0, 2\pi)$.

Параметричним рівнянням кривої називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}, \ t \in D,$$

де f_1, f_2 – деякі дійснозначні функції, а D – зв'язна множина на прямій. Більш точне визначення кривої та її параметричного рівняння буде розглядатися у курсі диференціальної геометрії.

Із параметричного рівняння легко отримати ***векторне рівняння***, що задає криву за допомогою радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ точок на ній:

$$\vec{r}(t) = \{f_1(t), f_2(t)\}.$$

Зауважимо, що векторне та параметричне рівняння відрізняються лише формою запису. Якщо вважати параметр t фізичною величиною – часом, то криву можна уявляти як траєкторію руху точки.

Іноді криву задають як ***геометричне місце точок*** (ГМТ).

Приклад. Знайти геометричне місце точок площини, добуток відстаней від яких до двох протилежних сторін квадрата дорівнює добутку відстаней до двох інших протилежних сторін квадрата.

Розв'язання. Спочатку введемо систему координат. Помістимо початок координат у центр квадрата, а осі декартової системи координат направимо паралельно до сторін квадрата. Нехай довжина сторони квадрата дорівнює $2a$, тоді рівняння сторін квадрата в цій системі координат: $x = -a,\ x = a,\ y = -a,\ y = a$.

Знайдемо відстані від точки $M(x, y)$ до прямих, які містять сторони квадрата, це, відповідно, $|x+a|$, $|x-a|$, $|y+a|$, $|y-a|$. За умовою, добутки відстаней до протилежних сторін рівні, отже

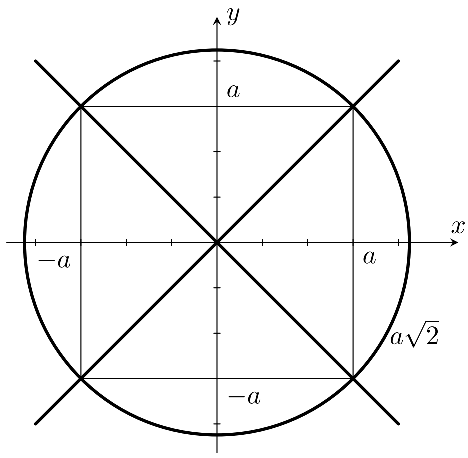
$$|x+a|\cdot|x-a| = |y+a|\cdot|y-a| \ \Rightarrow\ |(x+a)(x-a)| = |(y+a)(y-a)|.$$

Якщо $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $y \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, або $x \in (-a, a)$, $y \in (-a, a)$, то ми маємо

$$x^2 - a^2 = y^2 - a^2 \ \Rightarrow\ x = \pm y.$$

Якщо $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $y \in (-a, a)$, або $x \in (-a, a)$, $y \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, то

$$x^2 - a^2 = -y^2 + a^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2a^2.$$



Отже, шукане геометричне місце точок – це дві прямі, які містять діагоналі квадрата та коло, описане навколо цього квадрата (див. рис. праворуч).

В даному прикладі до заданого геометричного місця точок належить три прості криві. Зауважимо, що знайдене ГМТ не залежить від вибору системи координат.

2 Парабола

2.1 Визначення

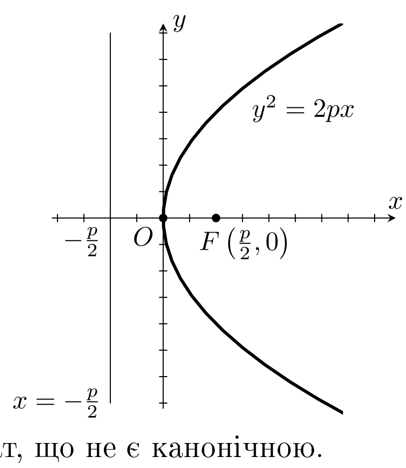
Визначення 2.1. *Геометричне місце точок на площині, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівняння*

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

називається ***параболою****. Це рівняння називається* ***канонічним рівнянням параболи****, а відповідна система координат називається* ***канонічною системою координат****.*

Геометричними характеристиками параболи є (див. рис. праворуч):

- точка $O(0, 0)$ — *вершина* параболи;
- точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ — *фокус* параболи;
- Ox — вісь симетрії або *фокальна вісь*;
- параметр p, який називається *фокальним параметром*;
- пряма $x = -\dfrac{p}{2}$ — *директриса* параболи.

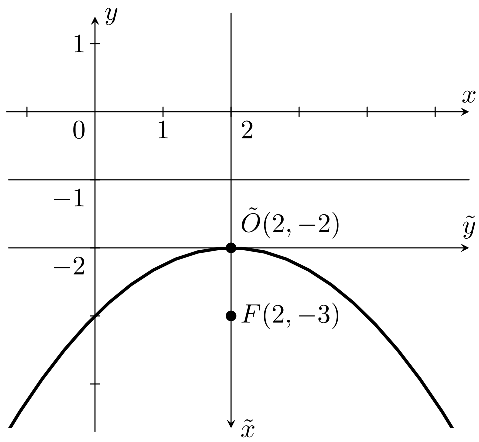


Зауважимо, що парабола може бути задана в системі координат, що не є канонічною.

Приклад. Встановити, що рівняння $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + x - 3$ задає параболу, знайти всі її геометричні характеристики.

Розв'язання. Виділяємо повний квадрат

$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 2, \text{ або } (x-2)^2 = -4(y+2).$$



Отже (див. рисунок праворуч), вісь симетрії паралельна осі Oy, фокальний параметр $p = 2$ $(2p = 4)$. Вершина має координати $\tilde{O}(2,-2)$. Гілки параболи спрямовані вниз. Фокус знаходиться на осі симетрії $x = 2$ на відстані $p/2 = 1$ вниз від вершини параболи, тобто в точці $F(2,-3)$. Директриса має рівняння $y = -1$.
Канонічне рівняння цієї параболи $\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}$. Канонічна система координат: вісь $\tilde{O}\tilde{x}$ співпадає з $x = 2$, яка напрямлена вниз, вісь $\tilde{O}\tilde{y}$ співпадає з $y = -2$.

Відрізок, який з'єднує дві точки параболи і походить через фокус називається *фокальною хордою.*

Відрізок, який сполучає фокус F з будь-якою точкою на параболі називається *фокальним радіусом.*

Твердження 2.1. *Довжина r фокального радіусу довільної точки $M(x_0, y_0)$ на параболі у канонічній системі координат може бути обчислена як*

$$r = x_0 + \frac{p}{2}.$$

Доведення. Нехай $M(x_0, y_0)$ належить параболі. Тоді

$$r = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + 2p\,x_0} = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right| = x_0 + \frac{p}{2}$$

так як $x_0 \geq 0$, $p > 0$. □

Геометричний зміст фокального параметра прояснює

Твердження 2.2. *Фокальний параметр p дорівнює половині довжини фокальної хорди, що перпендикулярна до фокальної осі.*

Доведення. Рівняння прямої, яка проходить через фокус перпендикулярно до фокальної осі: $x = \dfrac{p}{2}$. Отже, точки перетину цієї прямої з параболою:

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y^2 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{p}{2}, -p\right),\ \left(\frac{p}{2}, p\right).$$

Довжина відповідної хорди: $p - (-p) = 2p$. □

2.2 Директоріальна властивість параболи

Твердження 2.3. *Нехай $M(x_0, y_0)$ — довільна точка на параболі, d — відстань від точки M до директриси. Тоді $r/d = 1$.*

Доведення. Дійсно, використовуючи твердження 2.1, $d = x + \dfrac{p}{2} = r$. □

Вправа 2.1. *Довести, що справедливе обернене твердження: геометричне місце точок, відстані від яких до фіксованої точки і фіксованої прямої рівні, є параболою.*

Приклад. Написати рівняння параболи, якщо відомі її фокус $F(0,5)$ та директриса $x=-15$.

Розв'язання. **1 спосіб** (з використанням канонічного рівняння).

Директриса перпендикулярна осі симетрії параболи, фокус знаходиться на осі симетрії справа від директриси. Отже вісь симетрії параболи $y=5$. Канонічна система координат в даному випадку отримується паралельним перенесенням даної системи координат у вершину параболи.

Відстань між фокусом та директрисою дорівнює фокальному параметру $p=15$. Отже канонічне рівняння $\tilde{y}^2=30\tilde{x}$. Вершина знаходиться посередині між фокусом та директрисою, отже має координати $(-15/2,5)$. Рівняння параболи:

$$(y-5)^2=30\left(x+\frac{15}{2}\right),\quad y^2-10y-30x-200=0.$$

2 спосіб (з використанням фокальної властивості).

Відстані від довільної точки (x,y) на параболі до фокуса $F(0,5)$ і до директриси $x=-15$ рівні, тобто

$$\sqrt{x^2+(y-5)^2}=|x+15| \;\Rightarrow\; x^2+y^2-10y+25=x^2+30x+225 \;\Rightarrow\; y^2-10y-30x-200=0.$$

2.3 Дотична до параболи

Твердження 2.4. *Якщо точка $M(x_0,y_0)$ належить параболі, то рівняння дотичної до параболи в цій точці у канонічній системі координат має вигляд:*

$$yy_0=p(x+x_0).$$

Доведення. Дійсно, розглянемо точки параболи в верхній півплощині $(y>0)$. Тоді $y=\sqrt{2px}$. Оскільки рівняння дотичної для явно заданої кривої має вигляд $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$, а $y'(x_0)=\dfrac{p}{\sqrt{2px_0}}=\dfrac{p}{y_0}$, то маємо

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)$$

або

$$yy_0-y_0^2=p(x-x_0).$$

Оскільки $y_0^2=2p\,x_0$, отримуємо $yy_0=p(x+x_0)$ — рівняння дотичної. Аналогічно для точок параболи у нижній півплощині. □

Приклад. Написати рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$, що паралельна прямій $2x+2y+3=0$.

Розв'язання. Розв'язувати цю задачу можна двома способами.

1 спосіб. Записуємо рівняння дотичної до параболи в невідомій точці (x_0,y_0), що лежить на параболі:

$$yy_0=4(x+x_0) \;\Rightarrow\; 4x-y_0y+4x_0=0.$$

Ця дотична повинна бути паралельна прямій $2x+2y+3=0$. Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{4}{2}=\frac{-y_0}{2} \;\Rightarrow\; y_0=-4.$$

Оскільки точка (x_0, y_0) належить параболі, то $y_0^2 = 8x_0$. Отже, $16 = 8x_0$, $x_0 = 2$. Рівняння шуканої дотичної $4x + 4y + 8 = 0$, або $x + y + 2 = 0$.

2 спосіб. Записуємо рівняння прямої, що паралельна $2x + 2y + 3 = 0$:

$$2x + 2y + c = 0.$$

Шукаємо точки перетину прямої і параболи

$$\begin{cases} 2x + 2y + c = 0 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - \frac{c}{2} \\ \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = 8x, \end{cases}$$

$$x^2 + (c-8)x + \frac{c^2}{4} = 0.$$

Дотична має з кривою єдину подвійну точку перетину, тобто дискримінант цього рівняння повинен дорівнювати нулю. Отже, $D = (c-8)^2 - c^2 = -16c + 64 = 0$. Звідки $c = 4$. Точку дотику шукаємо при $c = 4$:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2,\ y = -4.$$

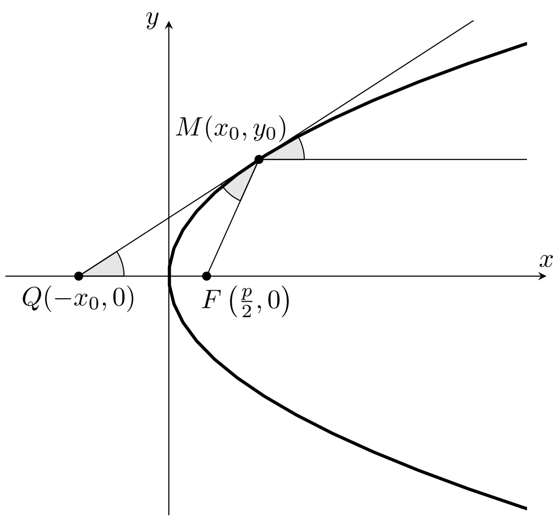
Отже рівняння дотичної $2x + 2y + 4 = 0$, або $x + y + 2 = 0$.

2.4 Оптична властивість параболи

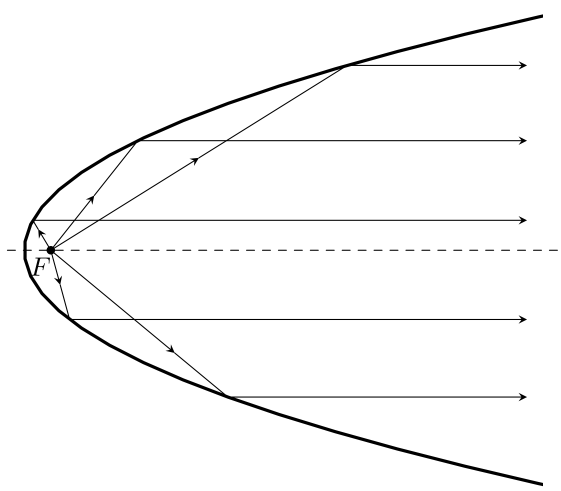
Твердження 2.5. *Дотична до параболи у точці M утворює рівні кути з фокальною віссю і з фокальним радіусом FM.*

Доведення. Розглянемо параболу у канонічній системі координат (рис. 1(а)). Нехай M має координати (x_0, y_0). Позначимо через Q – точку перетину дотичної з віссю Ox. З рівняння дотичної випливає, що Q має координати $(-x_0, 0)$. Отже, $|FQ| = p/2 - (-x_0) = p/2 + x_0 = |FM| = r$. Таким чином, трикутник QFM рівнобедрений, що і доводить твердження.

□



(а)



(б)

Рис. 1: Оптична властивість параболи.

Якщо уявити параболу як дзеркальну криву, то за законами оптики промінь світла, що виходить з фокусу, після віддзеркалення від параболи піде на нескінченність паралельно до фокальної осі (див. рис. 1(б)). Та навпаки, пучок променів, що паралельні фокальній осі, збереться в фокусі. Власне, з цієї причини вказана властивість називається оптичною. Фокальну вісь іноді називають *оптичною віссю* параболи. Оптична властивість має очевидні технічні застосування.

3 Еліпс

3.1 Визначення

Визначення 3.1. *Геометричне місце точок, координати яких відносно деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0,$$

називається ***еліпсом****. Дане рівняння називається* ***канонічним рівнянням еліпса****, а відповідна система координат називається* ***канонічною****.*

Геометричними характеристиками еліпса є (див. рис. 2):

- дві *вісі симетрії* Ox, Oy та один *центр симетрії* $O(0,0)$;
- величини a і b, які називаються, відповідно, *великою* та *малою* півосями;
- величина $p = \dfrac{b^2}{a}$, яка називається *фокальним параметром*;
- величина $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;
- точки $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$, які називаються *лівим* та *правим фокусами (вогнищевими точками)*, відповідно;
- величина $2c$, яка називається *фокусною відстанню;*
- величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$, яка називається *ексцентриситетом еліпса*;
- дві *директриси*:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c} \ \text{ – ліва, або } (F_1) \text{ директриса,}$$

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} \ \text{ – права, або } (F_2) \text{ директриса;}$$

- точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, які називаються *вершинами еліпса.*

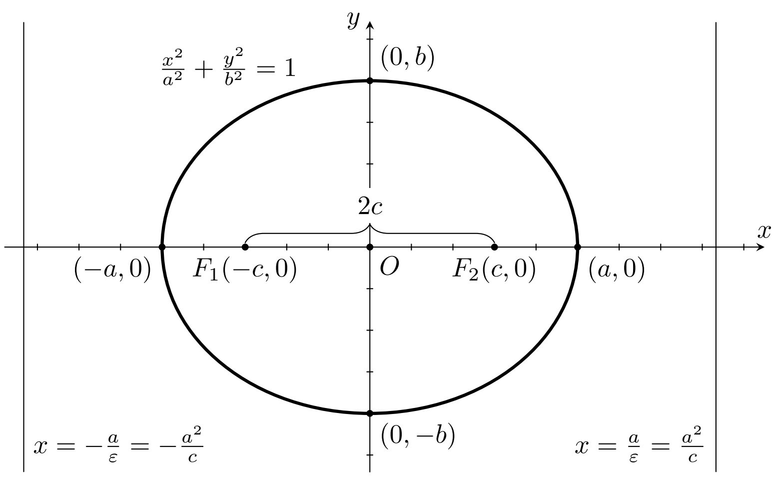


Рис. 2: Геометричні характеристики еліпса.

Уявлення про форму еліпса дає наступне твердження.

Твердження 3.1. *Еліпс*
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
можна отримати стисканням кола
$$x^2+y^2=a^2$$
вздовж однієї з двох взаємно перпендикулярних осей симетрії кола.

Доведення. Будемо проводити стискання вздовж осі Oy з коефіцієнтом b/a. Нехай точка з координатами (x_0, y_0) належить колу, тобто $x_0^2+y_0^2=a^2$. Тоді точка з координатами $x_1=x_0, y_1=\frac{b}{a}y_0$ належить еліпсу. Дійсно,
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{(\frac{b}{a}y_0)^2}{b^2}=\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}=1.$$
□

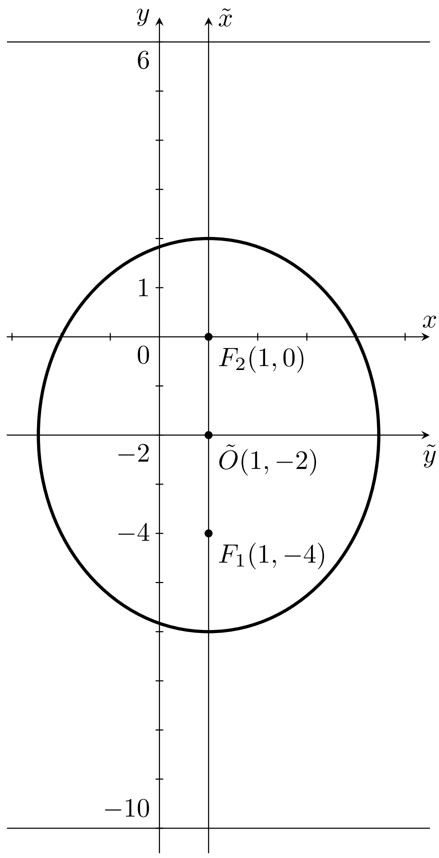
Зауваження.

1. Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ лежить у проміжку $(0,1)$. Чим ближче значення ексцентриситету до нуля, тим ближче форма еліпса до кола. При $\varepsilon\to 1$ форма еліпса наближається до відрізка $[-a,a]$.
2. Якщо фокуси еліпса розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, то рівняння еліпса має канонічний вигляд, але $b>a$. Тобто b – велика піввісь, a – мала піввісь. Тоді $c=\sqrt{b^2-a^2}$, фокуси мають координати $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}$, рівняння директрис $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Зауважимо, що еліпс може бути заданий у довільній (не канонічній) системі координат.

Приклад. Встановити, що рівняння $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ задає еліпс, знайти всі його геометричні характеристики.

Розв'язання. Виділяємо повні квадрати
$$4(x^2-2x+1)-4+3(y^2+4y+4)-12-32=0,$$
$$4(x-1)^2+3(y+2)^2-48=0,$$
$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$
Отже, велика піввісь $b=4$, мала піввісь $a=2\sqrt{3}$. Центр має координати $\tilde{O}(1,-2)$. Величина $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2$. Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Фокуси знаходяться на осі симетрії $x=1$ на відстані $c=2$ від центра еліпса, тобто в точках $F_1(1,-4)$, $F_2(1,0)$. Директриси мають рівняння $y=-10$, $y=6$ (на відстані $\frac{b}{\varepsilon}=8$ від центра).
Канонічне рівняння цього еліпса
$$\frac{\tilde{x}^2}{12}+\frac{\tilde{y}^2}{16}=1.$$
Канонічна система координат: вісь $\tilde{O}\tilde{x}$ співпадає з $x=1$, вісь $\tilde{O}\tilde{y}$ співпадає з $y=-2$ (див. рис. праворуч).



3.2 Фокальна властивість еліпса

Відрізок, що з'єднує фокус з точкою на еліпсі називається *фокальним радіусом* цієї точки.

Твердження 3.2. *Нехай r_1 – довжина фокального радіуса з лівого фокуса F_1, а r_2 – довжина фокального радіуса з правого фокуса F_2 до однієї і тієї ж точки $M(x,y)$ на еліпсі, що заданий у канонічній системі координат. Тоді*

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Доведення. Через те, що $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, точки $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$ знаходяться всередині еліпса. Із рівняння еліпса знаходимо, що $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Обчислимо відстань від $M(x,y)$ до лівого фокуса:

$$\begin{aligned} r_1 = &\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(-\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} = \\ &\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2} = \\ &\sqrt{\left(\frac{c}{a}x\right)^2 + 2\frac{c}{a}ax + a^2} = \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2\varepsilon ax + a^2} = |\varepsilon x + a|. \end{aligned}$$

Але $\varepsilon < 1, \quad |x| < a$, отже $|\varepsilon x| < a$, звідки $a + \varepsilon x > 0$, тобто $r_1 = a + \varepsilon x$.
Аналогічно перевіряється, що $r_2 = a - \varepsilon x$.

□

Як наслідок отримуємо фокальну властивість еліпса.

Наслідок 3.1. *Для будь-якої точки на еліпсі*

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Фокальна властивість повністю характерізує еліпс.

Вправа 3.1. *Довести, що геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох різних заданих точок $F_1,\ F_2$ дорівнює $2a = \mathrm{const}$ $(2a > 2c = |F_1F_2|)$, є еліпс з фокусами $F_1,\ F_2$ та великою піввіссю a.*

3.3 Директоріальна властивість еліпса

Твердження 3.3. *Для будь-якої точки M на еліпсі*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon (< 1),$$

де $d_1,\ d_2$ – відстані від точки M до відповідних директрис.

Доведення. Дійсно, у канонічній системі координат для точки M з координатами (x,y) маємо:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad d_1 = x + \frac{a}{\varepsilon}, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Тоді

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon,$$

що завершує доведення.

□

Директоріальна властивість характерізує еліпс.

Вправа 3.2. *Нехай l – фіксована пряма, F – фіксована точка, яка не лежить на цій прямій. Геометричне місце точок M площини, що задовольняють умову*

$$\frac{\textit{відстань від } M \textit{ до } F}{\textit{відстань від } M \textit{ до } l} = \mathrm{const} = \varepsilon < 1,$$

є еліпс з ексцентриситетом ε, фокусом F та директрисою l.

Приклад. Написати рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$, фокус $F(2,1)$ і рівняння відповідної директриси $x = 5$.

Розв'язання. **1 спосіб** (з використанням канонічного рівняння).

Оскільки директриса перпендикулярна до осі Oy, то осі еліпса паралельні осям координат, канонічна система $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ отримується з даної паралельним перенесенням початку координат у центр еліпса. Оскільки $F(2,1)$, то вісь $\tilde{O}\tilde{x}$ співпадає з $y = 1$. Нехай центр еліпса знаходиться в точці $\tilde{O}(x_0, 1)$.

$c = 2 - x_0$ – відстань від центра еліпса до фокуса; $\dfrac{a}{\varepsilon} = 5 - x_0$ – відстань від центра до директриси. Отже, відстань від фокуса до директриси $\dfrac{a}{\varepsilon} - c = 5 - 2$.

Оскільки $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$, то $c = \dfrac{2a}{3}$. Знаходимо

$$\frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{3a}{2} - \frac{2a}{3} = 3, \quad \frac{5a}{6} = 3, \quad a = \frac{18}{5}.$$

Отже, $c = \dfrac{2 \cdot 18}{3 \cdot 5} = \dfrac{12}{5}$. Знаходимо, $x_0 = 2 - \dfrac{12}{5} = -\dfrac{2}{5}$. Центр еліпса знаходиться в точці $\tilde{O}\left(-\dfrac{2}{5}, 1\right)$. Знаходимо, $b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{18^2}{5^2} - \dfrac{12^2}{5^2} = \dfrac{36}{5}$.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{18^2}{5^2}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{36}{5}} = 1.$$

З урахуванням паралельного перенесення отрумуємо загальне рівняння еліпса:

$$\frac{25\left(x + \frac{2}{5}\right)^2}{9 \cdot 36} + \frac{5(y-1)^2}{36} = 1,$$

$$25\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + 45(y-1)^2 = 324,$$

$$25x^2 + 20x + 4 + 45y^2 - 90y + 45 - 324 = 0,$$

$$5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0.$$

2 спосіб (з використанням директоріальної властивості).

Відношення відстані між довільною точкою $M(x,y)$ еліпса та фокусом F (в нашому випадку, $|FM| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$) до відстані між точкою M та відповідною директрисою (в нашому випадку, $|x - 5|$) дорівнює ексцентриситету ε. Отже,

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}{|x-5|} = \frac{2}{3},$$

$$9\left((x-2)^2+(y-1)^2\right)=4(x-5)^2,$$
$$9x^2-36x+36+9y^2-18y+9=4x^2-40x+100,$$
$$5x^2+9y^2+4x-18y-55=0.$$

Виділенням повних квадратів з цього рівняння можна отримати канонічне.

Фокальною хордою еліпса називається відрізок, що з'єднує дві точки на еліпсі та проходить через фокус.

Твердження 3.4. *Величина* $p=\dfrac{b^2}{a}$ *дорівнює половині довжини фокальної хорди, яка перпендикулярна до фокальної осі.*

Доведення. Довжини фокальної хорди, що перпендикулярна до фокальної осі, дорівнює відповідному фокальному радіусу, скажімо, r_1. Отже, у канонічній системі координат,

$$r_1=a+\varepsilon x=a+\varepsilon(-c)=a-\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}=p.$$

□

3.4 Рівняння дотичної до еліпса

Твердження 3.5. *Якщо точка* $M(x_0,y_0)$ *лежить на еліпсі, то у канонічній системі координат рівняння дотичної до еліпса в цій точці має вигляд*

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Доведення. Нехай $M(x_0,y_0)$ лежить на верхній половині еліпса. Ця половина може бути задана у явному вигляді як

$$y(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Обчислимо: $y'(x_0)=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$. Тоді для рівняння дотичної послідовно знаходимо:

$$(y-y_0)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$
$$b^2x_0(x-x_0)+a^2y_0(y-y_0)=0,$$
$$b^2x_0x+a^2y_0y-b^2x_0^2-a^2y_0^2=0.$$

Розділимо останню рівність на a^2b^2:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}\right)=0.$$

Отже,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

так як точка $M(x_0,y_0)$ належить еліпсу. Аналогічно розглядається випадок, коли M лежить на нижній половині еліпса.

□

Вправа 3.3. *Доведіть, що фокуси еліпса розташовані з однієї сторони по відношенню до будь-якої дотичної еліпса.*

3.5 Оптична властивість еліпса

Твердження 3.6. *Дотична до еліпса утворює однакові кути з фокальними радіусами, що проведені в точку дотику.*

Доведення. Нехай еліпс задано в канонічній системі координат, l — дотична до еліпса в точці $M(x_0, y_0)$, а h_1 і h_2 — відстані до дотичної від лівого (F_1) і правого (F_2) фокусів, відповідно (див. рис. 3(а)). Тоді

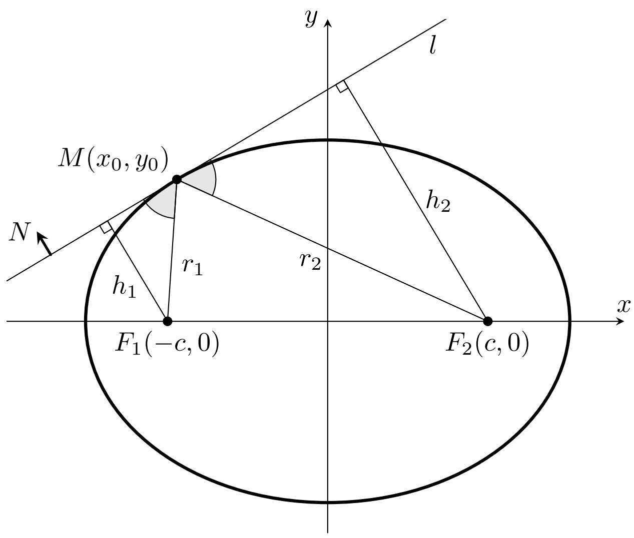
$$h_1 = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}(-c) - 1\right|}{|N|} = \frac{|-x_0\varepsilon - a|}{a\,|N|} = \frac{r_1}{a\,|N|},$$

$$h_2 = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}c - 1\right|}{|N|} = \frac{|x_0\varepsilon - a|}{a\,|N|} = \frac{r_2}{a\,|N|},$$

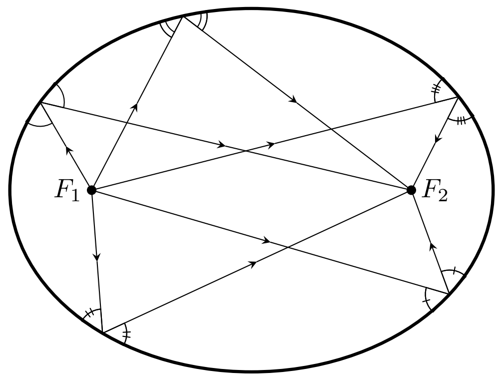
де $|N| = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$ – модуль вектора нормалі дотичної. Отже,

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}.$$

Остання рівність означає рівність синусів кутів, утворених фокальними радіусами з дотичною. Але так як обидва кута гострі, то з рівності синусів випливає рівність самих кутів. $\square$



(а)



(б)

Рис. 3: Оптична властивість еліпса.

Якщо уявити еліпс як дзеркальну криву, то за законами оптики промінь світла, що виходить з одного фокуса, після віддзеркалення від еліпса пройде через другий фокус (рис. 3(б)).

4 Гіпербола

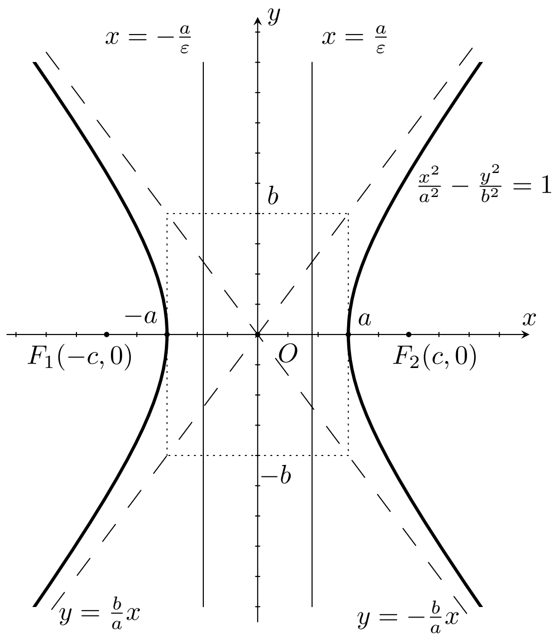
4.1 Визначення

Визначення 4.1. *Геометричне місце точок, координати яких відносно деякої прямокутної декартової системи координат задовольняють рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ *де* } a > 0,\ b > 0,$$

називається ***гіперболою****. Дане рівняння називається* ***канонічним рівнянням гіперболи****, а відповідна система координат називається* ***канонічною****. Якщо $a = b$, то гіпербола називається* ***рівнобічною****.*

Геометричними характеристиками гіперболы є (див. рис. праворуч):



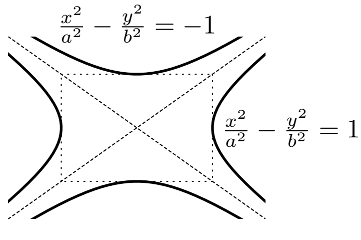
- дві *осі симетрії* Ox та Oy, один *центр симетрії* – точка $O(0, 0)$;
- параметр a – *дійсна піввісь*, параметр b — *уявна піввісь*;
- дві прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ — *асимптоти* гіперболи.
- величина $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, що називаються *лівим* та *правим фокусами (вогнищевими точками)*, відповідно;
- величина $2c$ — *фокусна відстань* (відстань між фокусами);
- точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$ — *вершини* гіперболи (перетин гіперболи із віссю симетрії);
- величина $p = \dfrac{b^2}{a}$ — *фокальний параметр*;
- величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$— *ексцентриситет гіперболи*;
- дві прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — *директриси* гіперболи;

Зауваження.

1. Гіпербола складається з двох зв'язних компонент: $\left\{(x, y)\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geqslant a\right\}$ – *права гілка* гіперболи; $\left\{(x, y)\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \leqslant -a\right\}$ – *ліва гілка* гіперболи.

2. Ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ завжди більший за 1. Чим ближче значення ексцентриситету до одиниці, тим ближче форма гіперболи до двох променів $(-\infty, -a]$, $[a, +\infty)$. При $\varepsilon \to +\infty$ форма гіперболи наближається до двох паралельних прямих $x = -a$, $x = a$.

3. Гіпербола з рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ називається *спряженою* до гіперболи з рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (див. рис. праворуч). Для спряженої гіперболи b – дійсна піввісь, a – уявна піввісь. Вершини спряженої гіперболи знаходяться в точках $(0, -b)$, $(0, b)$.



   Величина c має таке саме значення $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, фокуси спряженої гіперболи розташовані на осі Oy і мають координати $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, ексцентриситет $\varepsilon = c/b$, рівняння директрис $y = \pm b/\varepsilon$. Асимптоти гіперболи і спряженої гіперболи співпадають: $y = \pm b/a \cdot x$.

Приклад. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо її асимптотами є прямі $y = \pm 3x$.

Розв'язання. Асимптоти мають канонічне розташування, отже гіпербола має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$. Отже, $\frac{b}{a} = 3$, $b = 3a$. Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким чином,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + 9a^2}}{a} = \sqrt{10}.$$

Зазвичай в задачах мається на увазі канонічна гіпербола. Але ми можемо розглянути всі випадки. Спряжена гіпербола має такі самі асимптоти, але $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Отже, маємо $a = \frac{1}{3}b$ і

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}b^2 + b^2}}{b} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Зауважимо, що гіпербола, як і парабола та еліпс, може бути задана у довільній, не канонічній, системі координат.

Наступні два твердження дають уявлення про форму гіперболи.

Твердження 4.1. *Будь-яка гіпербола може бути отримана з рівнобічної* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ *шляхом стискання (розтягування) площини вздовж осі* Oy *з коефіцієнтом* $k = \frac{b}{a}$.

Доведення. Дійсно, нехай точка (x_0, y_0) належить рівнобічній гіперболі, тобто $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{a^2} = 1$. Легко перевірити, що в такому випадку точка з координатами $(x_1, y_1) = (x_0, b/a \cdot y_0)$ належить гиперболі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Твердження 4.2. *Рівнобічна гіпербола* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ *може бути отримана обертанням на кут* $\pi/4$ *графіка зворотної пропорційної залежності* $v = \frac{a^2}{2u}$.

Доведення. Нехай u, v – декартові координати на площині, і $v = \frac{a^2}{2u}$ – графік зворотної пропорційної залежності. Здійснимо обертання площини на кут $\pi/4$. Аналітичне задання такого перетворення

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y). \end{cases}$$

Отже, в нових координатах отримуємо $uv = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{a^2}{2}$.

□

4.2 Фокальна властивість гіперболи

Відрізок, який з'єднує фокус з точкою на гіперболі називається *фокальним радіусом.*

Твердження 4.3. *Нехай* r_1 *– довжина фокального радіуса з лівого фокуса* F_1*, а* r_2 *– довжина фокального радіуса з правого фокуса* F_2 *до однієї і тієї ж точки* $M(x, y)$ *на гіперболі, що задана у канонічній системі координат. Тоді для точок лівої гілки гіперболи*

$$\begin{aligned} r_1 &= -a - \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x; \end{aligned}$$

а для точок правої гілки

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= -a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Доведення. Обчислимо r_1:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 + 2x\frac{c}{a}a + c^2 - b^2} = \sqrt{(\varepsilon x + a)^2} = |\varepsilon x + a|.$$

Аналогічно знаходимо

$$r_2 = |a - \varepsilon x|.$$

Розглянемо *праву* гілку гіперболи. Для точок правої гілки маємо $x \geqslant a$. Так як $\varepsilon > 1$, то $\varepsilon x > a > 0$. Виходить $a - \varepsilon x < 0$ і $a + \varepsilon x > 0$. Розкривши модулі, знаходимо

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = -a + \varepsilon x. \end{cases}$$

Тепер розглянемо *ліву* гілку. Для точок лівої гілки маємо $x \leqslant -a$. Так як $\varepsilon > 1$, то $\varepsilon x < -a < 0$. Отже $a + \varepsilon x < 0$ і $a - \varepsilon x > 0$. Розкривши модулі, знаходимо

$$\begin{cases} r_1 = -a - \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases}$$

□

Як наслідок твердження 4.3 отримуємо фокальну властивість гіперболи.

Наслідок 4.1. *Для будь-якої точки на гіперболі*

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Фокальна властивість повністю характерізує гіперболу.

Вправа 4.1. *Довести, що геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох різних заданих точок* F_1*,* F_2 *дорівнює* $2a = \mathrm{const}$ $(2a < 2c = |F_1F_2|)$*, є гіперболою з фокусами* F_1*,* F_2 *і дійсною піввіссю* a*.*

4.3 Директоріальна властивість гіперболи

Твердження 4.4. *Для будь-якої точки M на гіперболі*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon (< 1),$$

де d_1, d_2 — відстані від точки M до відповідних директрис.

Доведення. Розглянемо праву гілку гіперболи, що задана у канонічній системі координат. Тоді

$$\begin{array}{ll} r_2 = -a + \varepsilon x, & r_1 = a + \varepsilon x \\ d_2 = x - \dfrac{a}{\varepsilon}, & d_1 = x + \dfrac{a}{\varepsilon}. \end{array}$$

Отже,

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{\varepsilon x + a}{x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Для лівої гілки – аналогічно. □

Директоріальна властивість, як і у випадках еліпса та параболи, повністю характерізує гіперболу.

Вправа 4.2. *Нехай l – фіксована пряма, F – фіксована точка, яка не лежить на цій прямій. Геометричне місце точок M на площині, які задовольняють умову*

$$\frac{\textit{відстань від } M \textit{ до } F}{\textit{відстань від } M \textit{ до } l} = \mathrm{const} = \varepsilon > 1,$$

є гіперболою з ексцентриситетом ε, фокусом F та директрисою l.

4.4 Рівняння дотичної до гіперболи

Твердження 4.5. *Якщо точка $M(x_0, y_0)$ належить гіперболі, що задана у канонічній систесі координат, то рівняння дотичної до гіперболи в цій точці має вигляд*

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Доведення аналогічне доведенню для дотичної до еліпса, проведіть його самостійно.

Вправа 4.3. *Доведіть, що фокуси гіперболи розташовані по різні сторони від дотичної в будь-якій точці гіперболи.*

Приклад. Із точки $C(1, -10)$ проведіть дотичні до гіперболи $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{32} = 1$.

Розв'язання. Точка $C(1, -10)$ не належить гіперболі. Записуємо рівняння дотичної до гіперболи в невідомій точці (x_0, y_0), що лежить на гіперболі:

$$\frac{xx_0}{8} - \frac{yy_0}{32} = 1 \ \Rightarrow \ xx_0 - \frac{yy_0}{4} = 8.$$

Ця дотична повинна проходити через точку $C(1, -10)$, отже

$$x_0 + \frac{10y_0}{4} = 8 \ \Rightarrow \ x_0 = 8 - \frac{5y_0}{2}.$$

Оскільки точка (x_0, y_0) належить гіперболі, то $\dfrac{x_0^2}{8} - \dfrac{y_0^2}{32} = 1$. Отже,

$$\left(8 - \frac{5y_0}{2}\right)^2 - \frac{y_0^2}{4} = 8,$$

$$64 - 40y_0 + \frac{25y_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{4} = 8,$$

$$6y_0^2 - 40y_0 + 56 = 0, \quad 3y_0^2 - 20y_0 + 28 = 0.$$

Маємо два корені цього рівняння $y_0 = 2$, $y_0 = \dfrac{14}{3}$. Отже, оскільки $x_0 = 8 - \dfrac{5y_0}{2}$, маємо дві точки дотику $(3, 2)$ та $\left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$. Рівняння шуканих дотичних $6x - y - 16 = 0$ та $22x + 7y + 48 = 0$.

4.5 Оптична властивість гіперболи

Твердження 4.6. *Дотична до гіперболи утворює рівні кути з фокальними радіусами, що проведені в точку дотику.*

Доведення. Нехай l – дотична до гіперболи в точці $M(x_0, y_0)$, а h_1 і h_2 — відстані до дотичної від лівого (F_1) і правого (F_2) фокусів відповідно. Обчислимо $h_1,\ h_2$:

$$h_1 = \frac{\left|\dfrac{x_0}{a^2}(-c) - 1\right|}{|N|} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{a|N|} = \frac{r_1}{a|N|},$$
$$h_2 = \frac{\left|\dfrac{x_0}{a^2}c - 1\right|}{|N|} = \frac{|\varepsilon x_0 - 1|}{a|N|} = \frac{r_2}{a|N|},$$

де $|N| = \sqrt{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2}$ – модуль вектора нормалі дотичної. Отримуємо $\dfrac{h_1}{r_1} = \dfrac{h_2}{r_2}$, що, як і у випадку еліпса, доводить твердження 4.6.

□

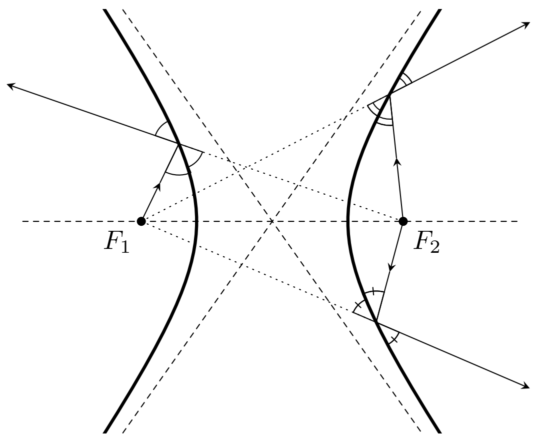


Рис. 4: Оптична властивість гіперболи.

Якщо уявити гіперболу як дзеркальну криву, то за законами оптики промінь світла, випущений з одного фокуса, після відбиття від гіперболи йде так, ніби його випустили з іншого фокуса (див. рис. 4).

5 Інші види рівнянь параболи, еліпса та гіперболи

5.1 Параметричні рівняння еліпса, гіперболи та параболи

Згадаємо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, якщо покласти $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, отримуємо ***параметричне рівняння еліпса***

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Згадаємо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Використовуючи тотожність $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, якщо $\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$, $\frac{y}{b} = \operatorname{sh} t$, отримуємо ***параметричне рівняння правої гілки гіперболи***

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

та ***параметричне рівняння лівої гілки гіперболи***

$$\begin{cases} x = -a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Зрештою, згадаємо канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px.$$

Отримуємо ***параметричне рівняння параболи***

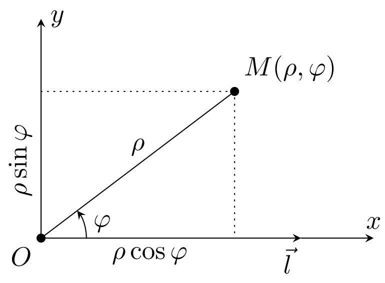
$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

5.2 Рівняння еліпса, гіперболи та параболи в полярній системі координат

Нагадаємо, як будується *полярна система координат* на площині:

1) фіксуємо на площині точку O і промінь $\vec{l}$ з початком у точці O;

2) для будь-якої точки $M \neq O$ позначимо через φ орієнтований кут від проміня $\vec{l}$ до проміня $\overrightarrow{OM}$ і нехай $\rho = |OM|$.



Полярними координатами точки M називається пара (ρ, φ).

Очевидно, що для точки O значення $\rho = 0$, а значення кута φ не визначено, тобто точка O не має полярних координат. Через те, що не всім точкам площини можна поставити у відповідність полярні координати, полярна система координат є прикладом *локальної системи координат.*

Точка O називається *полюсом*, промінь $\vec{l}$ називається *полярной віссю*, кут φ – *полярним кутом*, а величина ρ – *полярным радіусом* точки. Для забеспечення однозначної відповідності необхідно обмежити області змін полярних координат: $\rho \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Можна встановити зв'язок полярних і декартових координат точки. Якщо помістити початок декартової системи координат у полюс, а вісь Ox направити вздовж полярної осі, тоді (див. попередній рисунок)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Записати полярне рівняння кривої означає знайти залежність між полярними координатами (ρ, φ) точок, які належать цій кривій.

Використовуючи директоріальні властивості (див. твердження 2.3, 3.3 та 4.4), еліпс, гіперболу та параболу можна задати однаковим рівннянням як геометричне місце точок, таких, що

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \mathrm{const},$$

де r – відстань від фіксованої точки до будь-якої точки M на кривій (фокальний радіус), d – відстань від M до фіксованої прямої (директриси). При $\varepsilon < 1$ матимемо еліпс, при $\varepsilon > 1$ – гіперболу, при $\varepsilon = 1$ – параболу.

Повертаючись до полярної системи координат, нехай напрямок полярної осі співпадає з додатним напрямком осі Ox. Помістимо полюс полярної системи координат

- в фокус параболи,
- в лівий фокус еліпса,
- в правий фокус гіперболи (див. рис. 5).

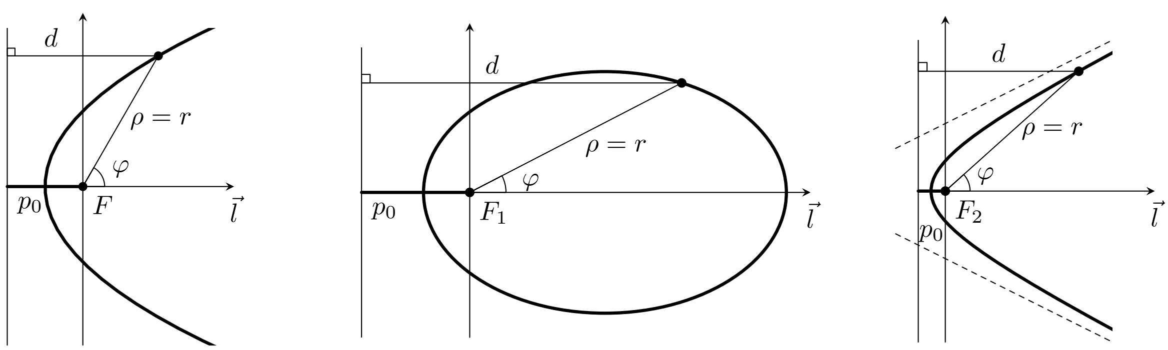


Рис. 5: Задання кривих другого порядку в полярній системі координат.

Тоді фокальний радіус r співпаде з полярним радіусом ρ точок на кривій, полярный кут φ буде кутом між фокальним радіусом і віссю Ox.

Позначимо p_0 – відстань між фокусом та відповідною директрисою. Отже, $r = \rho$, $d = p_0 + \rho\cos\varphi$. Використовуючи директоріальну властивість, отримуємо

$$\frac{\rho}{p_0 + \rho\cos\varphi} = \varepsilon, \quad \rho = \varepsilon p_0 + \varepsilon\rho\cos\varphi, \quad \rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon p_0.$$

З'ясуємо, чому дорівнює εp_0 у випадку еліпса, гіперболи та параболи. Очевидно, що для останньої ($\varepsilon = 1$) $\varepsilon p_0 = p$ – фокальний параметр. В решті випадків

$$p_0 = \left|\frac{a}{\varepsilon} - c\right| = \left|\frac{a^2}{c} - c\right| = \left|\frac{a^2 - c^2}{c}\right| = \frac{b^2}{c};$$

$$\varepsilon p_0 = \frac{c}{a} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a} = p.$$

Отже, ми з'ясували, що для всіх кривих другого порядку *фокальний параметр* p співпадає з εp_0, де p_0 – відстань між фокусом та директрисою.

Таким чином, ***полярне рівняння параболи*** (полюс в фокусі, $\varepsilon = 1$), ***еліпса*** (полюс у лівому фокусі, $\varepsilon < 1$), ***правої гілки гіперболи*** (полюс у правому фокусі, $\varepsilon > 1$) виглядає так:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Аналогічно можна отримати ***полярні рівняння параболи***, у якої гілки напрямлені *вліво* (полюс у фокусі), ***еліпса*** (фокус у правому фокусі) та ***лівої гілки гіперболи*** (полюс у лівому фокусі). В цьому випадку $r = \rho$, $d = p_0 + \rho \cos(\pi - \varphi) = p_0 - \rho \cos \varphi$. Використовуючи директоріальну властивість, отримуємо єдине рівняння

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

5.3 Рівняння еліпса, гіперболи та параболи, віднесені до вершини

Еліпс, гіперболу і параболу можна описати єдиним по формі рівнянням не тільки в полярній системі координат, але і в декількох спеціальних декартових. Це системи координат, початок яких співпадає з однією з вершин відповідної кривої, а вісь Ox – з фокальною віссю. Про таку систему координат будемо казати, що вона віднесена до вершини.

Твердження 5.1. *Існує система декартових прямокутних координат, відносно якої парабола, еліпс і гипербола мають єдине рівняння*

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Доведення. 1) Парабола. Її канонічне рівняння

$$y^2 = 2p\,x$$

є, очевидно, рівнянням в системі координат, що віднесена до вершини.

2) Еліпс. Нехай еліпс задано у канонічній системі координат (x, y). Помістимо початок нової системи координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в ліву вершину еліпса. Формули переходу мають вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + a, \\ \tilde{y} = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \tilde{x} - a \\ y = \tilde{y} \end{cases}$$

Тоді послідовно знаходимо:

$$\left(\frac{\tilde{x} - a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - 2\frac{\tilde{x}}{a} + 1 + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \tilde{y}^2 = 2\frac{b^2}{a}\tilde{x} - \frac{b^2}{a^2}\tilde{x}^2.$$

Оскільки

$$\frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

то в нових координатах рівняння еліпса запишеться у вигляді

$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x} + (\varepsilon^2 - 1)\tilde{x}^2.$$

3) Гіпербола. Аналогічно випадку еліпса, для канонічно заданої гіперболи змінемо систему координат. Помістимо початок нової системи координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в праву вершину гіперболи. Формули переходу мають вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - a, \\ \tilde{y} = y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \tilde{x} + a, \\ y = \tilde{y}. \end{cases}$$

Послідовно знаходимо:

$$\left(\frac{\tilde{x}+a}{a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + 2\frac{\tilde{x}}{a} + 1 - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \tilde{y}^2 = 2\frac{b^2}{a}\tilde{x} + \frac{b^2}{a^2}\tilde{x}^2.$$

Оскільки

$$\frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1,$$

то в нових координатах рівняння гіперболи запишеться у вигляді

$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x} + (\varepsilon^2 - 1)\tilde{x}^2.$$

Для завершення доведення, достатньо зафіксувати канонічну систему координат параболи, а еліпс і гіперболу перенести так, щоб ліва вершина еліпса і права вершина гіперболи співпали з початком координат. В такій системі координат парабола, еліпс і права гілка гіперболи матимуть рівняння

$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

□

5.4 Сім'ї еліпсів і гіпербол зі спільним фокальним параметром

Запишемо еліпс, параболу і гіперболу єдиним рівнянням

$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Зафіксуємо фокальний параметр p і прослідкуємо за поведінкою сімей еліпсів і гіпербол при зміні ексцентриситету ε (див. рис. 6).

Твердження 5.2. *При фіксованому фокальному параметрі p, парабола $y^2 = 2p\,x$ є граничною кривою для сімей еліпсів $y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ при $\varepsilon \to 1 - 0$ та сімей (правих гілок) гіпербол $y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ при $\varepsilon \to 1 + 0$.*

Доведення. Розглянемо сім'ю еліпсів

$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Відмітимо, що всі еліпси сім'ї охоплюються параболою, оскільки для точок на еліпсі

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 < 2p\,x.$$

Обчислимо координати фокусів еліпса через p і ε. Оскільки

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a},$$

то

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

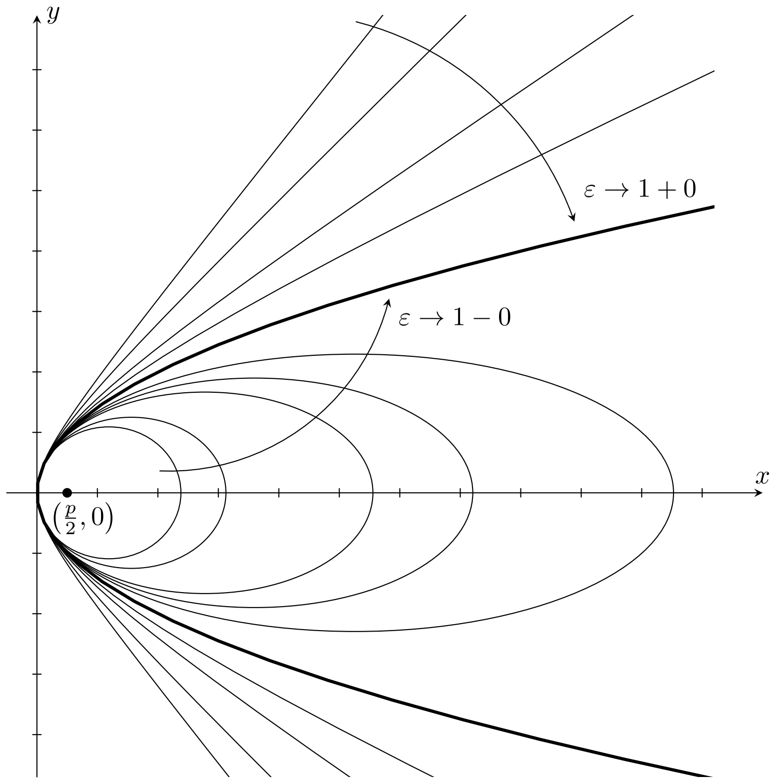


Рис. 6: Сім'я кривих другого порядку $y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$, що віднесені до вершини та мають спільний фокальний параметр p.

Тоді,

$$x(F_1) = a - c = a - a\varepsilon = a(1-\varepsilon) = \frac{p}{1+\varepsilon},$$
$$x(F_2) = a + c = a + a\varepsilon = a(1+\varepsilon) = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Спрямовуючи $\varepsilon \to 1 - 0$, отримуємо:

$$x(F_1) \to \frac{p}{2}, \quad x(F_2) \to +\infty.$$

Розглянемо сім'ю гіпербол

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2, \quad \varepsilon > 1.$$

Відмітимо, що тепер сім'я гіпербол (точніше, праві гілки) охоплюють параболу, оскільки для точок гіперболи

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 > 2p\,x.$$

Зробимо аналогічні обчислення:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{p}{a}, \quad a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отже,

$$x(F_1) = c - a = a(\varepsilon - 1) = \frac{p}{\varepsilon + 1},$$
$$x(F_2) = -c - a = -a(\varepsilon + 1) = -\frac{p}{\varepsilon - 1}$$

і при $\varepsilon \to 1 + 0$ ми отримуємо

$$x(F_2) \to \frac{p}{2}, \quad x(F_1) \to -\infty.$$

$\square$

5.5 Сім'ї софокусних еліпсів і гіпербол

Зафіксуємо на площині дві точки F_1 и F_2 на відстані $|F_1F_2| = 2c$. Із фокальної властивості еліпса і гіперболи випливає, що точки F_1 і F_2 визначають деякий еліпс і деяку гіперболу з фокусами F_1 і F_2. Такі еліпс і гіпербола називаються *софокусними*. Насправді, ми маємо сім'ю софокусних еліпсів і сім'ю софокусних гіпербол.

Розглянемо ***еліпси***. Дійсно, фокальна властивість еліпса

$$r_1 + r_2 = 2a$$

містить параметр a, який виражає в рівнянні еліпса велику піввісь. Мала піввісь може бути знайдена як функція від параметра a, а саме, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ з областю визначення $a \geq c$. Отже, позначаючи $a = \lambda > 0$, ***сім'ю софокусних еліпсів*** можна задати у вигляді

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (\lambda > c).$$

При $\lambda \to \infty$ ця сім'я наближається до кола нескінченного радиіуса, оскільки

$$a = \lambda \to \infty, \quad b = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \to \infty,$$

а при $\lambda \to c + 0$ ця сім'я стискається до відрізка $[-c, c]$, оскільки

$$a = \lambda \to c, \quad b = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \to 0.$$

Для ***гіпербол*** справедливі аналогічні міркування. Візьмемо дійсну піввісь a в якості параметра: $a = \mu$. Тоді $b = \sqrt{c^2 - \mu^2}$ з областю визначення $0 < \mu < c$, і ***сім'я софокусних гіпербол*** матиме рівняння

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1 \quad (0 < \mu < c).$$

Прослідкуємо за асимптотикою цієї сім'ї та за кутовим коефіцієнтом асимптот.

При $\mu \to +0$,

$$\begin{aligned} &a = \mu \to 0, \\ &b = \sqrt{c^2 - \mu^2} \to c, \\ &k = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\mu} = \sqrt{\left(\frac{c}{\mu}\right)^2 - 1} \to +\infty, \end{aligned}$$

і ми отримуємо вісь Oy в якості граничної множини. Гілки гіперболи розпрямлюються, кут нахила асимптот наближається до прямого, а вершини гіперболи наближаються одна до одної.

При $\mu \to c - 0$,

$$\begin{aligned} &a = \mu \to c, \\ &b = \sqrt{c^2 - \mu^2} \to 0, \\ &k = \frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{\mu}\right)^2 - 1} \to 0, \end{aligned}$$

і в якості граничної множини ми маємо два промені $[c, +\infty)$ і $(-\infty, -c]$.

Твердження 5.3. *На площині через кожну точку, що не лежить на осі координат, проходить єдиний еліпс і єдина гіпербола із кожної сім'ї софокусних еліпсів і софокусних гіпербол (див. рис. 7).*

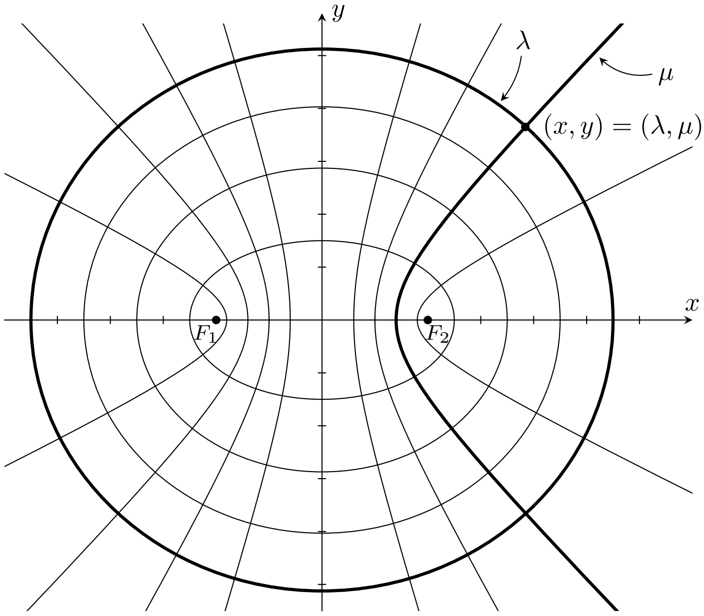


Рис. 7: Сім'ї софокусних еліпсів та гіпербол. Еліптична система координат.

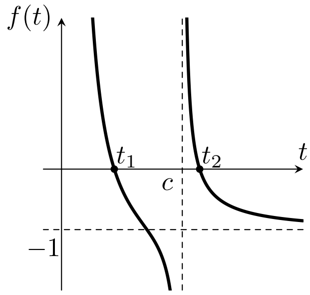
Доведення. Обидві сім'ї, що розглядаються, можна описати єдиним рівнянням

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - c^2} = 1, \quad t > 0.$$

При цьому, значенням параметру $t \in (0, c)$ відповідають гіперболи, а значенням $t \in (c, +\infty)$ – еліпси з цих сімей.

Розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - c^2} - 1, \quad t \in (0, c) \cup (c, +\infty),$$



що залежить від параметрів x та y (див. рис. праворуч).

Зафіксуємо довільну точку M з координатами (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, і покажемо, що в області $t > 0$ рівняння $f(t) = 0$ з параметрами x_0, y_0 має рівно два розв'язки, один з яких $t_1 \in (0, c)$, а другий $t_2 \in (c, +\infty)$.

Дійсно, при $t > 0$

$$f_t{}' = -2\frac{{x_0}^2}{t^3} - 2t\frac{{y_0}^2}{(t^2 - c^2)^2} < 0,$$

тобто функція монотонно спадає, причому

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +0} f(t) = +\infty, \\ \lim\limits_{t \to c-0} f(t) = -\infty, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to c+0} f(t) = +\infty, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -1. \end{cases}$$

Отже, існують та єдині $t_1 \in (0, c)$ і $t_2 \in (c, +\infty)$ такі, що $f(t_1) = 0, f(t_2) = 0$. □

5.6 Еліптична система координат

Запишемо дві сім'ї софокусних еліпсів и гіпербол

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad \lambda > c \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \quad 0 < \mu < c. \end{cases} \tag{$*$}$$

В попередньому розділі ми показали, що кожній точці $M(x, y)$, що не лежить на осях координат, відповідає *єдина* пара параметрів (λ, μ), яка визначає єдиний еліпс і єдину гіперболу, що проходять через точку M. *Обернена відповідність, очевидно, не є однозначною.* Кожній парі (λ, μ) відповідає еліпс і гіпербола, які перетинаються в 4-х точках. Але оскільки ці точки знаходяться в *різних* квадрантах, то обмежуючись яким-небудь одним квадрантом ми встановлюємо взаємно-однозначну відповідність $(x, y) \longleftrightarrow (\lambda, \mu)$. В такому випадку параметри (λ, μ) можна прийняти в якості нових (локальних) координат на площині. Ці локальні координати називаються *еліптичною системою координат* (див. рис. 7).

Твердження 5.4. *Декартові та еліптичні координати точок, що не лежать на осях декартової системи координат, пов'язані співвідношеннями*

$$x = \pm\frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

Доведення. Зв'язок між еліптичними і декартовими координатами задається рівняннями (*). Знайдемо явний вираз декартових координат через еліптичні для точок першого квадранта. Послідовно знаходимо:

$$\frac{x^2(\lambda^2 - c^2)}{\lambda^2} + \frac{x^2(c^2 - \mu^2)}{\mu^2} = \lambda^2 - c^2 + c^2 - \mu^2,$$

$$\frac{x^2(\mu^2(\lambda^2 - c^2) + \lambda^2(c^2 - \mu^2))}{\lambda^2\mu^2} = \lambda^2 - \mu^2,$$

$$\frac{x^2c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2\mu^2} = \lambda^2 - \mu^2.$$

Отже,

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Аналогічно,

$$y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

Завдяки симетрії еліпсів та гіпербол значення x та y в інших квадрантах відрізняються лише знаками.

□

Твердження 5.5. *Еліптична система координат є ортогональною.*

Доведення. Ортогональність системи координат означає ортогональність координатних ліній. Координатними лініями еліптичної системи координат є еліпси і гіперболи. Покажемо, що в спільних точках софокусні еліпси і гіперболи мають взаємно ортогональні дотичні.

Нехай $M(x_0, y_0)$ – точка перетину софокусних еліпса і гіперболи. Вектори нормалей дотичних в цій точці мають вигляд

$$\vec{N}_1 = \left\{\frac{x_0}{\lambda^2}, \frac{y_0}{\lambda^2 - c^2}\right\} \quad \text{для еліпса,}$$

$$\vec{N}_2 = \left\{\frac{x_0}{\mu^2}, -\frac{y_0}{c^2 - \mu^2}\right\} \quad \text{для гіперболи.}$$

Використовуючи зв'язок декартових і еліптичних координат, знаходимо:

$$\left\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\rangle = \frac{x_0^2}{\lambda^2\mu^2} - \frac{y_0^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

□

6 Класифікаційна теорема для кривих другого порядку

6.1 Деякі інші види рівнянь другого порядку

Множина точок (x, y) на площині, що задовольняють рівнянню $f(x, y) = 0$, де $f(x, y)$ – многочлен другого порядку від двох змінних, називається *кривою другого порядку.*

Еліпс, гіпербола і парабола не вичерпують весь клас кривих другого порядку. Розглянемо інші види рівнянь і відповідних кривих.

Уявний еліпс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Ця “крива” задає порожню множину точок на площині, але ця множина задається многочленом 2-го порядку. Ця “крива” має дві “осі симетрії” і один “центр симетрії”.

Пара прямих, які перетинаються.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Дійсно, розкладання лівої частини на множники призводить до пари прямих

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

які перетинаються в точці $(0, 0)$. Ця “крива” має дві осі симетрії та один центр симетрії.

Пара уявних прямих, які перетинаються.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Єдиною точкою на площині, що задовольняє цьому рівнянню є точка $(0, 0)$. За аналогією з попереднім рівнянням, говорять про пару уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці. Ця “крива” має дві “осі симетрії” і “центр симетрії”.

Пара паралельних прямих.

$$\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння задає пару прямих

$$y = +b \quad \text{та} \quad y = -b,$$

які, очевидно, паралельні. Ця “крива” має нескінченно багато осей симетрії (перпендикулярних цим прямим) і лінію центрів симетрії – вісь Ox.

Пара паралельних уявних прямих.

$$\frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Це рівняння задає порожню множину точок на площині, але, аналогічно до попереднього випадку, цю “криву” називають парою паралельних уявних прямих. Ця “крива” має нескінченно багато “осей симетрії” і “лінію центрів симетрії”, — вісь Ox.

Пара прямих, що співпадають.

$$y^2 = 0.$$

Це рівняння задає одну пряму — вісь Ox. Але так як ця пряма є граничною для пари прямих $y^2 = b^2$ при $b \to 0$, то говорять про пару прямих, що співпадають. Ця крива так само має нескінченно багато осей симетрії, перпендикулярних осі Ox і лінію центрів симетрії – вісь Ox.

6.2 Класифікаційна теорема

Сутність класифікаційної теореми полягає в тому, що вибором прямокутної декартової системи координат рівняння будь-якої кривої 2-го порядку може бути приведене до рівняння еліпса, гіперболи, параболи, уявного еліпса і перерахованим 5 типам рівнянь пар прямих.

Еліпс (дійсний і уявний), гіпербола і парабола утворюють клас кривих 2-го порядку, *які не розпадаються.* Решта кривих 2-го порядку – це криві, *які розпадаються* (на пари прямих).

За кількістю центрів симетрії криві 2-го порядку ділять на *центральні*, що мають єдиний центр симетрії, і *нецентральні*, що не мають центру симетрії або мають більше одного центру симетрії. До типу центральних відносяться еліпси (дійсний і уявний), гіпербола, пари прямих, що перетинаються (дійсних і уявних). До нецентральних відносяться парабола, пари паралельних прямих (дійсних і уявних) і пара прямих, що співпадають.

Зауважимо, що в перетині двох вищезгаданих класів лежить парабола, бо вона є єдиною нецентральною кривою 2-го порядку, яка не розпадається.

Твердження 6.1. *Нехай*

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

рівняння кривої другого порядку. Тоді існує декартова прямокутна система координат, в якій рівняння даної кривої набуває одного з 9 виглядів:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *еліпс,*

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — *уявний еліпс,*

3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *гіпербола,*

4) $y^2 = 2px$ — *парабола,*

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара прямих, що які перетинаються,*

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара уявних прямих, що перетинаються,*

7) $y^2 = b^2$ — *пара паралельних прямих* $(b \neq 0)$,

8) $y^2 = -b^2$ — *пара параллельных уявних прямих* $(b \neq 0)$,

9) $y^2 = 0$ — *пара прямих, що співпадають.*

Доведення. **А.** Розглянемо випадок, коли $a_{12} = 0$. Отримуємо декілька варіантів, розглянемо кожен з них.

А1. Якщо $a_{11} \neq 0$ і $a_{22} \neq 0$, то зробимо перетворення наступним чином:

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x + \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right) + a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}y + \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right) + \underbrace{a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}}_{\tilde{a}_{33}} = 0$$

Зробимо паралельне перенесення:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}, \\ \tilde{y} = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}}. \end{cases}$$

Тоді у новій системі координат маємо рівняння:

$$a_{11}\tilde{x}^2 + a_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{a}_{33} = 0.$$

Якщо $\tilde{a}_{33} = 0$, то

- при $a_{11} \cdot a_{22} > 0$ це рівняння пари уявних прямих, що перетинаються;
- при $a_{11} \cdot a_{22} < 0$ це рівняння пари дійсних прямих, що перетинаються.

Якщо $\tilde{a}_{33} \neq 0$, то після ділення на $-\tilde{a}_{33}$ рівняння набуде вигляду

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 - 1 = 0, \quad \text{або} \quad \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 = 1,$$

де $\lambda_1 = -a_{11}/\tilde{a}_{33},\ \lambda_2 = -a_{22}/\tilde{a}_{33}$. Якщо тепер

- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$, то це рівняння еліпса;
- $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$, то це рівняння уявного еліпса;
- $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то це рівняння гіперболи.

A2. Якщо $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{13} \neq 0$, тоді зробимо наступне перетворення:

$$a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}y + \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right) + 2a_{13}x + a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0,$$
$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{13}\left(x + \frac{1}{2a_{13}}(a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}})\right) = 0.$$

Виконаємо паралельне перенесення

$$\begin{cases} \tilde{y} = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}}, \\ \tilde{x} = x + \dfrac{1}{2a_{13}}\left(a_{33} - \dfrac{a_{23}^2}{a_{22}}\right). \end{cases}$$

В нових координатах отримуємо

$$a_{22}\,\tilde{y}^2 = -2a_{13}\tilde{x},$$

і після ділення на a_{22} отримуємо рівняння параболи

$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x},$$

де $p = -a_{13}/a_{22}$.

A3. Якщо $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{13} = 0$, тоді зробимо наступне перетворення:

$$a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}y + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}\right) + \underbrace{a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}}_{\tilde{a}_{33}} = 0.$$

Після паралельного перенесення

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

рівняння кривої набуде вигляду

$$a_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{a}_{33} = 0.$$

Після ділення на a_{22} отримуємо рівняння

$$\tilde{y}^2 = \lambda_2,$$

де $\lambda_2 = -\dfrac{\tilde{a}_{33}}{a_{22}}$. Якщо

- $\lambda_2 > 0$, то це рівняння пари паралельних дійсних прямих;
- $\lambda_2 < 0$, то это це рівняння пари паралельних уявних прямих;
- $\lambda_2 = 0$, то это це рівняння пари прямих, що співпадають.

B. Розглянемо випадок, коли $a_{12} \neq 0$. Зробимо обертання на кут φ:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi, \\ y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Покажемо, що існує таке обертання, що в новій системі координат $\tilde{a_{12}} = 0$. Виконаємо підстановку

$$a_{11}(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) +$$
$$a_{22}(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi)^2 + 2a_{13}(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi) + 2a_{23}(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) + c = 0.$$

Знайдемо коефіцієнт при $\tilde{x}\tilde{y}$ і прирівняємо його до 0. Послідовно обчислюємо

$$-2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + 2a_{22}\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = 0,$$

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi = 2a_{12}\cos 2\varphi,$$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Отже, існує такий кут $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$, що після обертання в новій системі координат $\tilde{a_{12}} = 0$, і ми отримуємо випадок **A.** $\square$